MİNİMAKS PORTFÖY MODELİ İLE MARKOWİTZ ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY MODELİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Nihat BOZDAĞ[1] **Şenol ALTAN**[2] **Sibel DUMAN**[3]

ÖZET

Bu çalışmada portföy seçimi için geçmişteki getiri değerleri kullanılarak yeni bir yaklaşım tanıtılmaya çalışılmıştır. Bu yaklaşıma göre portföy modeli doğrusal programlama problemi olarak oluşturulmuş ve optimal çözüm elde edilmiştir. Bu yaklaşım, riskin ölçüsü olan varyansı minimum yapmak yerine minimum getirileri dikkate almaktadır. Burada tanımlanan portföy, belirli bir getiri düzeyinde maksimum kaybı minimum yapacak şekilde seçilmektedir. Bu modelin amaç fonksiyonu doğrusal olarak tanımlandığından, ortalama–varyans dikkate alınarak oluşturulan karesel programlama modelinin oluşturulma karmaşıklığı elimine edilmiştir. Bu çalışmada, 05.01.2004 - 31.12.2004 periyodu için İMKB 30 Endeksi kullanılarak hem Markowitz ortalama-varyans karesel programlama modeli ile hem de minimaks kuralına göre oluşturulan doğrusal programlama yaklaşımına göre portföy seçimi yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Young (1998), doğrusal programlama çözümlü minimaks portföy modeli ile karesel programlama tabanlı ortalama-varyans modelinin benzer sonuçlar verdiğini iddia etmektedir. Bu çalışmada bu iddia yukarıda belirtilen dönem çerçevesinde test edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Markowitz Ortalama-Varyans Analizi, Optimizasyon, Doğrusal Programlama, Minimaks Kuralı, İMKB 30 Endeksi.

COMPARISING OF THE MINIMAX PORTFOLIO SELECTION METHOD AND MARKOWITZ MEAN-VARIANCE PORTFOLIO MODEL

ABSTRACT

In this study, a new principle for choosing portfolios based on historical returns data is introduced; the optimal portfolio based on this principle is the solution to a simple linear programing problem. This principle uses minimum return rather than variance as a measure of risk. In particular, the portfolio is chosen that minimizes the maximum loss over all past observation periods, for given level of return. This objective function avoids the logical problems of a quadratic programming implied by mean-variance portfolio selection rules. In this paper, both a minimax portfolio selection rule with linear programming solution and Markowitz mean-variance portfolio model were done then all of solutions were compared. Young(1998) has remarked the minimax portfolio solution to the linear programming similar to the quadratic programming model. The relation is examined between these two models during January, 2004 and December, 2004 in ISE(İstanbul Stock Exchange) 30 index.

Key Words : Markowitz Mean-Variance Analysis, Optimization, Linear Programming, Minimax Rule, ISE 30 Index.

---

[1] Prof.Dr. Gazi Üniversitesi, İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, Beşevler - ANKARA. nbozdag@nihatbozdag.net

[2] Yrd.Doç.Dr. Gazi Üniversitesi, İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, Beşevler - ANKARA. saltan@gazi.edu.tr

[3] Arş.Gör. Gazi Üniversitesi, İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, Beşevler - ANKARA. sduman@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

Bireyler iktisadi kısıtlayıcı koşullar altında gelecekteki yaşamını garanti altına almak amacıyla sahip olduğu varlıklardan elde edecekleri toplam getirilerini, risk durumunu da göz önüne alarak artırmayı amaçlar. Birçok seçenekle karşı karşıya kalan bu kişiler, varlıklarını ne şekilde değerlendirecekleri konusunda karar vermeye çalışır.

Bir bireyin sahip olduğu hisse senedi, tahvil ve diğer değerli varlıklar bir portföyü oluşturur. Bu bilgiden hareketle herhangi bir portföyün oluşturulması aşamasında yapılan işlemler bütünü de "***Portföy Analizi***" ya da "***Portföy Yönetimi***" şeklinde ifade edilir.

Portföy yönetiminin tanımı ve içeriği, kapsam ve incelenen ayrıntılar açısından değişir. Portföy yönetimi konusuna büyük katkıları olan Sharpe, portföy yönetimini "Paranın yönetilme süreci" olarak tanımlamıştır. Portföy analizinin asıl konusu varlıklar olduğundan insanlığın zenginliği arttıkça portföy oluşturmanın önemi de buna bağlı olarak artar. Özellikle son yıllarda bilgisayar ve iletişim teknolojisindeki gelişmeler, piyasaların globalleşmesi, yeni finansal araçların işlem gördüğü piyasaların oluşturulması ve yeni teorilerin ortaya konulması portföy yönetimine de yeni bir yaklaşım kazandırır (Özçam,1997).

Markowitz'in 1956 yılında ortalama-varyans modeli ve Wolfe'un 1959 yılında oluşturduğu etkin çözümü, modern portföy teorisini yeniden yapılandıran bir temel teşkil eder. Daha önceleri portföy analizinde esas ağırlık bireysel varlık seçimi ile ilgili iken, Markowitz'in bu çalışmasından sonra risk-getiri değişimi çerçevesinde portföy içindeki varlıkların birbiri ile olan etkileşimi ortaya konularak çeşitlendirme ve portföyün tümünün değerlendirilmesi ele alınmıştır.

Portföy yönetiminde temel amaç, alternatif yatırım araçlarından hangilerinin portföye hangi oranlarda alınacağına ve sürekli yenilenen iktisadi durumlara göre portföyün ne zaman güncellenmesi gerektiğine karar vermektir.

Yatırımcının yatırım kararını belirleyen en önemli unsurlar risk ve bu yatırımdan elde edeceği getiridir. Bu çalışmada, modern portföy teorisine göre getiri ve yatırım miktarı kısıtları altında yatırımcının üstlendiği risk miktarı minimize edilmeye çalışılmıştır. Diğer taraftan bu modele alternatif olarak minimaks kuralına göre getiriyi maksimize eden bir doğrusal programlama modeli oluşturularak yatırım planı belirlenmeye çalışılmıştır. Portföy modeli, öncelikle doğrusal olmayan programlamanın özel bir durumu olan kuadratik programlama ile oluşturulup *Excel çözücü programı* kullanılarak optimal portföy seçimi yapılmıştır.

Sharpe(1971), bir portföy analizi probleminin yapısı doğrusal programlama metoduna uygun ise, daha kolay bir şekilde çözümünün sağlanabileceğini ifade etmiştir. Portföy yönetimi bir optimizasyon probleminin çözümü ile gerçekleştirilir. Bu çalışmanın asıl amacı, yatırımcının isteklerini ve hedeflerini en yüksek derecede sağlayabilecek bir portföyün seçiminde öncelikle karesel programlama ve daha sonra da doğrusal programlama modeli kullanılarak sonuçları karşılaştırmaktır. Diğer bir ifadeyle, portföy seçiminin prensibi tanıtılmış ve optimum portföyün seçimi doğrusal programlama ile gösterilmiştir. Optimum portföy "**minimaks**" kuralına göre oluşturulmuştur: Bu optimum portföy; tüm gözlenen zaman sürecinde kabul edilebilir minimum ortalama getiri koşulu altında, tüm geçmiş periyoda göre maksimum kaybı minimum yapmaktadır. Sonuç olarak (1a) –(1e) de doğrusal programlama ile yapılan minimaks portföy seçimi ile getiri kısıtı altında portföy varyansını minimum yapan karesel programlama problemi ile elde edilen portföy benzerdir(Young, 1998). Bu sebeple, bu iki kurala göre portföy seçimini karşılaştırmak için İMKB 30 endeksini tanımlayan şirketlere ilişkin hisse senetlerine göre portföy seçimi yapılmaya çalışılmıştır. Çalışmada analizler hem WINQSB Paket Programı hem de Excel Paket programı ile yapılmıştır. Ayrıca veri kümesi y_{jt} getiri değerleri dikkate alınarak minimaks kuralına göre oluşturulan portföy optimal bir şekilde elde edilmiştir.

2. MİNİMAKS PORTFÖY SEÇİM KURALI

Aşağıda portföy modelinin minimaks kuralına uygun doğrusal programlama model yapısı verilmektedir. N hisse senedi sayısı, T zaman sürecini göstermek üzere,

y_{jt}: t anında j. hisse senedine 1 birim yatırıldığında elde edilen getiri

$\bar{y}_j$ **:** j. hisse senedinin ortalama getirisi = $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{jt}$

x_j: j. hisse senedinin portföy içindeki payı

y_{pt}: t anında portföyün getirisi = $\sum_{j=1}^{N} x_j y_{jt}$

E_p: Portföyün ortalama getirisi = $\sum_{j=1}^{N} x_j \bar{y}_j$

M_p: Portföyün Minimum getirisi = $\min_t y_{pt}$

ifade edilmiştir. "Minimaks Portföy", portföyün minimum getirisini yani M_p yi maksimum yapan portföy olarak tanımlanır. Bu bilgilere göre doğrusal programlama portföy modeli aşağıdadır:

Amaç Fonksiyonu: $\underset{M_p, x}{maks} \; M_p$ (1a)

Kısıtlar: $\sum_{j=1}^{N} x_j y_{jt} - M_p \geq 0, \quad t = 1, \cdots, T$ (1b)

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \bar{y}_j \geq G \tag{1c}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \leq W \tag{1d}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, N \tag{1e}$$

(1b) den de görüldüğü üzere M_p nin değeri, en çok portföyün minimum getirisi kadardır. Bu modelde M_p nin değerinin maksimum yapılması amaçlandığından bu değer minimum getirilerin maksimum değeri veya diğer bir ifadeyle maksimum kayıpların minimum değeri olarak tanımlanır.

Aşağıda portföy getirisinin her bir periyot için H eşik değerini aşma kısıtı altında beklenen getiriyi maksimize eden ve yukarıdaki modele eşdeğer bir doğrusal programlama portföy modeli verilmiştir:

Amaç Fonksiyonu:

$$\underset{x}{maks}\ E = \sum_{j=1}^{N} x_j \bar{y}_j \qquad (2a)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j y_{jt} \geq H,\ t = 1,\cdots,T \qquad (2b)$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \leq W \qquad (2c)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\cdots,N \qquad (2d)$$

3. MARKOWITZ ORTALAMA -VARYANS ANALİZİ

1956 yılında Markowitz tarafından geliştirilen ortalama - varyans modeli ve daha sonra 1956'da Wolfe'nin bulduğu etkin çözüm, modern portföy seçimi için bir temel teşkil eder. Markowitz, portföy getirisinin ortalama ve varyans seçimine göre iyi tanımlanan portföy seçim probleminden elde edilen beklenen kazancı ifade eden bir model geliştirmiştir. Modern portföy yaklaşımı, yatırımcının kabul ettiği risk düzeyinde yatırımından beklediği getiriyi tanımlar. Başka bir ifadeyle modern portföy yaklaşımı, tüm yatırımcıların aynı risk düzeyinde en yüksek getiriye ve aynı getiri düzeyinde ise en düşük riske sahip olma istekleri üzerine ortaya atılan bir kuramdır. Bu modele ilişkin tanımlanan varsayım, yatırımcının tüm varlığını seçilen portföye dağıtması gereğidir.

Markowitz ortalama-varyans portföy optimizasyonu problemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Amaç Fonksiyonu:

$$\min_{x} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} x_j x_k \sigma_{jk} \qquad (3a)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \bar{y}_j \geq G \qquad (3b)$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \leq W \qquad (3c)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\cdots,N \qquad (3d)$$

Burada σ_{jk} iki hisse senedi arasındaki kovaryans olmak üzere,

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{T-N}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{jt}-\bar{y}_j\right)\left(y_{kt}-\bar{y}_k\right) \tag{4}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Young, 1998). Bu model karesel programlama problemidir.

4. MODELLERİN ÇÖZÜMLENMESİ

Bu çalışmanın temel amacı daha önce de belirtildiği üzere doğrusal programlama çözümlü minimaks portföy seçim kuralı ile Markowitz ortalama-varyans portföy seçim kuralı arasındaki ilişkiyi test etmektir. Bu amaçla, çalışmanın bu bölümünde İMKB 30 endeksinde yer alan 28[4] adet şirkete ilişkin hisse senedinin 30.12.2002 – 31.12.2004 tarihleri arasında haftalık getiri değerleri kullanılarak karesel programlama ve minimaks kuralına göre oluşturulan doğrusal programlamanın uzun dönem performans değerlendirmesi yapılmıştır. Hisse senetlerine ilişkin ilgili t dönemi getirisi $y_{jt} = \frac{P_{j,t+1}-P_{jt}}{P_{jt}}$ ile hesaplanmıştır. Ayrıca her iki modelde de hisse senetlerinin portföy içindeki payları toplamı $\sum_{j=1}^{N} x_j = 1$ olarak alınmıştır.

4.1. KARESEL PROGRAMLAMA PORTFÖY SEÇİMİ

Burada öncelikle standart tek zamanlı portföy seçim modelinin Markowitz modern portföy teorisi dikkate alınarak karesel yapıdaki yaklaşımı geliştirilmiştir. Modelde riskin minimize edilmesi doğrusal olmayan yapıda tanımlanan amaç fonksiyonudur.

Çalışmada İMKB 30 endeksi ile eşit risk-getiri yapısına sahip olan portföyler karesel programlama ile belirlenecektir. Birinci aşamada bilinen karesel programlama portföy modelinin çözümlenebilmesi için İMKB 30 içinde yer alan 28 şirketin Ocak 2004 - Aralık 2004 dönemleri arasındaki haftalık getiri değerleri elde edilmiştir.

Markowitz karesel programlama modeli ile portföy seçimi problemini çözmek için Microsoft Excel XP programı içerisinde yer alan ÇÖZÜCÜ eklentisi kullanılmıştır[5].

Modelin yapı taşları olan karar değişkenleri portföy sepetine girebilecek olan İMKB 30 endeksinde işlem gören 28 adet hisse senedine ayrılan paylardır.

---

[4] Bu çalışmada bazı hisselere ait kapanış fiyatları elde edilemediğinden analiz dışında bırakılmıştır.

[5] Karesel programlama modelinin amaç fonksiyonunun katsayılarını oluşturan varyans-kovaryans matrisi Ek- 1'de verilmiştir.

Modelin kısıtlayıcıları 2. bölümde verildiği üzere hisse senetlerinin getiri toplamları portföyün hedeflenen getirisinden fazla olacak şekilde tanımlanan **getiri kısıtı** ve yatırım miktarları toplamının yatırımcının sahip olduğu miktara eşit olmasını ifade eden kısıttır**.** Getiri kısıtının katsayıları olan her hisse senedinin ilgili dönem için ortalama getiri değerleri aşağıda Tablo1'de verilmiştir.

Tablo 1: IMKB 30 Endeksi Hisselerine İlişkin Ocak 2004 - Aralık 2004 Dönemi Ortalama Getiri Değerleri

AEFES	**AKBNK**	**AKENR**	**AKGRT**	**AKSA**
5.64	10.41	4.97	9.19	5.87
ENKAI	**EREGL**	**FINBNK**	**FROTO**	**GARAN**
7.73	8.62	11.13	9.76	12.77
MIGRS	**SAHOL**	**TCELL**	**TNSAS**	**TOASO**
5.94	12.23	10.29	6.59	11.19
ALARK	**ARCLK**	**BEKO**	**DOHOL**	**DYHOL**
8.44	10.54	7.91	10.79	11.41
HURGZ	**İHLÂS**	**ISCTR**	**KCHOL**	**KRDMD**
11.05	6.17	10.08	10.96	7.95
TUPRS	**VESTL**	**YKBNK**		
6.04	9.57	10.71		

Modelin matematiksel yapısının açık gösterimi aşağıda verilmiştir:

Amaç fonksiyonu:

$$MinZ : c_1 X_1^2 + c_2 X_2^2 + ... + c_{28} X_{28}^2$$

Burada c_i ile tanımlanan katsayılar i. hisse senedinin varyans-kovaryans matrisinde yer alan köşegen elemanıdır. Diğer bir ifadeyle i. hisse senedine ilişkin varyans değeridir.

$$MinZ : 19.22 X_1^2 + 25.30 X_2^2 + 13.61 X_3^2 + ... + 33.58 X_{28}^2$$

Getiri kısıtı:

$$1.02 X_1 + 1.21 X_2 + 0.31 X_3 + ... 1.49 X_{28} \geq 1.99$$

Bu eşitsizlikte yer alan katsayılar her bir hisse senedinin ilgili dönem için ortalama getirileri ve sağ taraf sabiti olan 1.99 değeri de hedeflenen toplam portföy getirisini ifade eder.

Bu modelde ayrıca yapısal kısıt olarak ifade edilen ve portföy yönetimi modelinde mutlaka yer alması gereken yatırım araçlarına yapılan yatırım paylarının toplamının yatırımcının sahip olduğu miktara eşit olması kısıtı yer alır.

$$X_1 + X_2 + ... + X_{28} = 1$$

Burada modelin çözümü sonucunda hisse senetlerine ayrılan pay miktarları elde edilmek amaçlandığından karar değişkenlerinin toplamı 1'e eşit olarak alınmıştır.

Model, EXCEL XP Paket programı ile çözülmüştür ve sonuçlar aşağıda Tablo 2'de verilmiştir. Bu sonuçlar yatırımcının alternatif portföyler arasından minimum riskli portföy sepetini oluşturmak için seçtiği hisse senetlerine ilişkindir.

Tablo 2: Yatırım Yapılabilecek Hisse Senetleri ve Portföy İçindeki Payları

HİSSE SENEDİ ADI	PORTFÖY AĞIRLIĞI	PORTFÖYÜN % AĞIRLIĞI
AEFES	0,10	10,39
FINBNK	0,30	29,55
KRDMD	0,28	28,33
MIGRS	0,03	3,40
TCELL	0,19	19,41

Tablo 2'deki sonuçlara göre FINBNK ve KRDMD hisse senetlerinin portföy içinde ayrılan paylarının diğerlerine göre yüksek olduğu gözlenmektedir. Bu sonuçlara göre; eldeki paranın %10,39'u AEFES hissesine, %29,55'i FINBNK hissesine, %28,33'ü KRDMD hissesine, %3,4'ü MIGRS hissesine ve %19,41'i TCELL hissesine ayrılacaktır.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada karesel programlama ve minimaks kuralına göre oluşturulan doğrusal programlama modelleri kullanılarak yöntemler karşılaştırılmış ve yatırımcıya bir portföy sepeti önerilmeye çalışılmıştır. Karesel programlama modelinin çözüm sonuçlarına göre yatırımcı elindeki parasının %29,55'ini FINBNK ve %28,33'ünü de KRDMD hisse senetlerine yatırmak üzere portföy içinde en yüksek payları bu iki hisse paylaştırmaktadır. Modelin oluşturulma yapısı yatırımcı için en yüksek kazancı ve en küçük riski sağlayan yatırım planlamasına dayanır. Buna göre hisse senetlerinin gerek kapanış fiyatları gerekse getirileri incelendiğinde model sonuçları bu durumu yansıtmaktadır. Diğer bir ifadeyle getirileri daha yüksek olan hisse senetleri yerine daha az risk taşıyan hisse senetlerine yatırım yapıldığı görülmektedir. Araştırma kapsamı belirlenen dönem için analiz sonucunda elde edilen hisse senetlerine yatırım yapılacağıdır.

İkinci aşamada portföy minimaks kuralına göre doğrusal programlama portföy modeli oluşturulmuştur. Young(1998), Markowitz ortalama-varyans portföy modeli ile minimaks tabanlı doğrusal programlama portföy modeli sonuçlarının benzer olduğunu iddia etmektedir. Ancak bu iki yönteme göre İMKB 30 endeksi içinde yer alan 28 adet hisse senedine ilişkin portföy seçimi yapıldığında sonuçların aynı olmadığı gözlemlenmiştir. (3a) - (3d) Markowitz modelinin çözüm sonuçları elde edilirken, (2a) - (2d) modelinin uygun çözüm alanı oluşmadığından en iyi çözüm de bulunamamıştır. Bu durumun nedenlerinden biri Türkiye'de İMKB getiri değerlerinin oldukça dalgalı (volatile) bir yapıya sahip olduğu gerçeğinden kaynaklanabilir. İkincisi, çalışmada incelenen haftalık getiri değerlerine ilişkin ilgili dönem verilerinin çok fazla negatif değerli (getiri yerine götürü olması) olması olabilir. Bu durum çözümün hedeflenen portföy getirisi ile kıyaslandığında uygun bir yapıya sahip olmadığını göstermiştir. Dolayısıyla gerek model yapısı gerekse incelenen döneme ilişkin durumlar üzerinde çalışmalar devam etmektedir.

KAYNAKÇA

Akmut, Ö., (1989), Sermaye piyasası analizleri ve portföy yönetimi, Ankara

Bazaraa M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M., (1993), Nonlinear programming theory and applications, **John Waley & Sons, Inc.,** Canada

Dias, F., "Quadratic Programming Applied to Modern Portfolio Selection"

Elton, J.E., Gruber, M.J., (1991), Modern portfolio theory and investment analysis**, John Wiley & Sons, Inc.,** Canada

Hillier, F.S., Lieberman, G.J., (1989), Introduction to operations research, **McGraw-Hill,Inc.**, Singapore

Jensen, P. and Bard, J., "Nonlinear Programming Methods: Quadratic Programming", Operations Research Models and Methods,

Ohlson, J., (1977), "Quadratic Approximations of The Portfolio Selection Problem When The Means and Variances of Returns are Infinite", Management Science, Vol.23, No.6, USA.

Oral, G., (1989), Doğrusal olmayan programlama, **Akademi Matbaası,** Ankara

Ryan, T.M., (1978), Theory of portfolio selection, **The Macmillan Press Ltd.**, London

Sharpe, W., (1971), "A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem", Journal Financial and Quantitative Analysis, 6, 1263-1275.

Stone, B., (1973), "A Linear Programming Formulation of the General General Portfolio Selection Model", Journal Financial and Quantitative Analysis, 8, 621-636.

Taha, H.A., (1987), Operations research: An introduction, **Macmillan Publishing Company, N**ew York

Winston, W., (1994), Operations Research Applications and Algorithms, Duxbarry Press, California

Yamakazi,H. ve H. Konno, (1991), "Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market", Management Science, 37, 519-531.

Young, M. R., (1998), " A Minimax portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution, Management Science, 44, 673-683.